



# ¿Cuánto **tiempo?** tienes que esperar en fila?

¡Resuélvelo! ¿Cuánto tiempo piensa que debes esperar en esta fila si tienes el número 300 y toma 30 segundos para comprar un boleto?

**Pista:** Calcula la cantidad de tiempo que tardaría a una persona comprar un boleto. Usa este estimado para calcular la cantidad de tiempo que tienes que esperar en la fila.

Calcular y medir el tiempo son destrezas básicas para todos. Negocios tales como bancos, restaurantes de servicio rápido, áreas de esquí y aeropuertos necesitan maneras eficientes de reducir al máximo el tiempo que se espera en fila.

## Comienza:

Imagínate que vas a comprar un boleto. ¿Cuánto tiempo te llevaría?

## Solución completa:

Si cada persona tarda 30 segundos en comprar un boleto, entonces las 299 personas delante de ti tardarían aproximadamente  $30 \times 299$ , es decir 8,970 segundos, equivalentes a 150 minutos. Eso es 2 1/2 horas.

Otra manera de calcular esto es darse cuenta de que, si le lleva 30 segundos a una persona para comprar un boleto, entonces 2 personas pueden comprar un boleto en 1 minuto. Por lo tanto, lleva  $300 \div 2$ , o aproximadamente 150 minutos para que llegue tu turno. Eso es una espera de aproximadamente 2 1/2 horas.

## **Experimento:**

Ve a un restaurante de servicio rápido, a un supermercado o algún sitio en el cual la gente tenga que esperar en fila. Calcula la cantidad promedio de personas en la fila y la cantidad promedio de tiempo que tienen que esperar. ¿Hay diferencia en el tiempo de espera entre diferentes clases de fila? Por ejemplo, ¿la fila "expreso" es en realidad más rápida?

## Retos adicionales:

- 1. Si esperas que 600 personas compren boletos para un concierto de rock en tu escuela y la taquilla abre media hora antes del concierto, ¿cuántos vendedores necesitas?
- 2. Si hay 300 personas en fila antes de ti para comprar un boleto, ¿A cuántos pies estás de la taquilla?

## Algo para pensar:

- ¿Las filas de espera se mueven más rápidamente en los cines o en los conciertos?
- ¿Qué factores alargarían o acortarían el tiempo para comprar un boleto?

## ¿Sabías que...?

- El Libro de Récords Mundiales de Guinness para 1993 informó que la línea de monedas más larga jamás creada midió 34.57 millas de longitud. Tenía 2,367,234 monedas, y estaba en Kuala Lumpur, Malasia.
- El récord mundial en 1993 para la línea de monedas más valiosa fue de 1,724,000 monedas de 25 centavos. Medía 25.9 millas, y estaba en Atlanta, GA.
- El 21 de abril de 1990, se estimó que 180,000 personas pagaron para escuchar a Paul McCartney en el Estadio Maracaná en Río de Janeiro, Brasil.

- En el estreno de "La Amenaza Fantasma" en Londres, 11,500 boletos se vendieron en solamente 30 minutos el 12 de junio de 1999.
- La teoría de colas tiene que ver con los tiempos de espera en fila.

## Recursos:

## Libro:

Matthews, Peter, ed. *The Guinness Book of World Records 1993*. New York: Bantam Books, 1993.

### Sitio Web:

"Does this line ever move?" Informs

mie.eng.wayne.edu/faculty/chelst/informs

## Respuestas a retos adicionales:

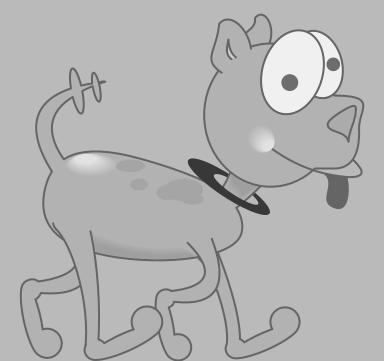
pio de la fila.

Si cada persona necesita aproximadamente 2 pies de espacio lineal eal en el terreno, entonces estás a 300 x 2, o 600 pies del princieal en el terreno, entonces estás a 300 x 2, o 600 pies del princie

(Z.)

Si comprar cada boleto lleva 30 segundos, harian falta 5 horas para que una persona vendiera 600 boletos. Ya que solamente tienes media hora para vender los boletos, necesitarias 10 vendedores.

(T)







## ¿Cuán *rápido* late tu corazón?

¿Cuánto tardaría tu corazón en latir 1000 veces?

¡Resuélvelo! Si empezaras a contar tus latidos a medianoche del 1 de enero de 2000, entonces ¿cuándo contarías el latido "del millón"? ¿Cuándo el de "mil millones"? Pista: Calcula el pulso de tu corazón en latidos por

> Calcular y entender números grandes son destrezas matemáticas útiles. Sin ellas sería difícil comprender el tamaño de la deuda nacional, por ejemplo, o cuántas

> > millas hay de aquí a Marte.

bah boom, bah boom, bah boom

## Comienza:

El mejor sitio para tomar tu pulso es la muñeca o el cuello. Cuenta el número de latidos de tu pulso durante 15 minutos y multiplica por 4; o cuenta el número de latidos durante 30 segundos y multiplica por 2. Una vez sepas el número de veces que tu corazón late en 1 minuto, calcula el número de latidos en una hora, y luego en un día.

## Solución completa:

Al calcular, a menudo puedes encontrar una respuesta razonable más rápidamente. Redondea el número de tus latidos a uno que sea fácil de usar para cálculos. Por ejemplo, si tu corazón late 72 veces por minuto, 70 latidos por minuto daría un estimado razonable.

Latidos por hora	Latidos por día	Estimado de latidos por día
70 × 60 = 4200	4200 x 24	4000 × 25 = 100,000

Luego calcula el número de días que hacen falta para llegar a 1 millón de latidos.

1,000,000 ÷ 100,000 = 10. Por lo tanto, 1,000,000 lleva 10 días.

Si comienzas a contar el 1 de enero, el latido "del millón" sería el 10 de enero. Para mil millones de latidos, el número de días es 1,000,000,000 ÷ 100,000 = 10,000. Ya que hay 365 días en el año, y 10,000 ÷ 365 es aproximadamente 27.4, llevaría 27.4 años. El latido de los "mil millones" sería en mayo de 2027.

## **Experimento:**

Ve a un sitio web y busca números grandes usando palabras clave como mil millones, billón y números grandes.

## Trata www.mcn.net/-jimloy/trilliom.html

### **Retos adicionales:**

- ¿Has vivido 1 millón de minutos? ¿Conoces a alguien que haya vivido ese tiempo?
- 2. ¿Has vivido mil millones de minutos? ¿Conoces a alguien que haya vivido ese tiempo?
- 3. ¿Has vivido 1 millón de horas? ¿Conoces a alguien que haya vivido ese tiempo?
- 4. Supón que tu pulso sea de 72 latidos por minuto. Lo redondeaste a 70 e hiciste tus cálculos. Si no lo redondearas, ¿cuánta diferencia habría en tus respuestas?

## Algo para pensar:

 Si tuvieras 1 millón de gotas de agua, ¿sería más posible que te la bebieras, tomaras un baño en ella, o nadaras en ella? ¿Y si tuvieras mil millones de gotas de agua?

- Hay aproximadamente 3 millones de personas en la ciudad de Chicago. ¿Cuántas veces es más grande o más pequeña la población de tu ciudad que la de Chicago?
- ¿Cómo afecta el redondeo a tus respuestas al sumar? ¿Al multiplicar?
   ¿Cuán cercano es suficientemente cercano?

## ¿Sabías que...?

- 1 millón es 1000 veces 1000, o sea 10<sup>3</sup> 10<sup>3</sup> = 10<sup>6</sup>, sin importar dónde vives, pero en inglés la definición de un billón depende de dónde estés en el mundo.
- En los Estados Unidos, "un billón" (mil millones) es 1000 veces 1 millón, o sea 10³ 10⁶ = 10⁶, pero en Gran Bretaña, Francia, y otros países, 1 billón es 1 millón por 1 millón, o sea 10⁶ 10⁶ = 10¹².

## Recursos:

## Libros:

- Morrison, Philip. Powers of Ten. New York: Scientific American Books, W. H. Freeman, 1982.
- Paulos, John Allen. *Innumeracy*. New York: Hill and Wang, 1988.
- Schwartz, David M. How Much Is a Million? New York: William Morrow & Company, 1994.
- Schwartz, David M. If You Made a Million. New York: William Morrow & Company, 1994.
- Strauss, Stephen. The Sizesaurus. New York: Avon Books, 1997.

## Respuestas a retos adicionales:

madamente 9 meses.

Para 1 millón de latidos, la diferencia es de aproximadamente 15.5 horas. Para 1 millones de latidos, la diferencia es de aproxi-

aproximadamente 114 años.

Hay aproximadamente  $24 \times 365$ , o sea 8760 horas en un año. Ya que 1,000,000 8760 es poco más de 114, no es probable que conozcas a alguien que haya vivido más de 1 millón de horas,

(.£)

No.Ya que mil millones de minutos es cerca de 1000 x 2, o sea 2000

(S)

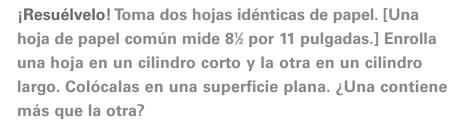
Sî. Hay 60 minutos en una hora, 24 horas al día y 7 días a la semana. Ya que  $60 \times 24 \times 7 = 10,080$ , hay cerca de 10,000 minutos en una semana. Entonces, 1 millón de minutos es aproximadamente 100 semanas, o aproximadamente 2 años, así que cualquier persona mayor de 2 años ha vivido por lo menos 1 millón de minutos.











**Pista:** Coloca el cilindro más alto dentro del cilindro más corto. Llena el alto con cereal seco, arroz o rosetas de maíz; luego sácalo del cilindro más corto. ¿Cuál contiene más?

Hacer estimados visuales y calcular volúmenes son destrezas útiles. Los diseñadores e ingenieros usan estas destrezas para encontrar maneras económicas de empacar y proteger artículos.





## Comienza:

Adivina y luego usa la pista.

## Solución completa:

El proceso descrito en la "Pista" muestra que el cilindro más corto contiene más.

- Para determinar una respuesta matemáticamente, calcula el volumen de cada cilindro. El volumen es la superficie de la base, multiplicada por la altura. En este caso, los cilindros son circulares. La superficie de un círculo es π r r o aproximadamente
   3.14 r r. Para calcular el radio, r, usa una regla para calcular el ancho del diámetro del círculo. Divide el diámetro por 2 para obtener el radio. Otra forma de calcular el radio de un círculo es usar la fórmula:
  - Circunferencia de un círculo =  $2 \bullet \pi \bullet$  radio =  $2\pi r$ Radio = Circunferencia dividida por  $(2\pi)$

Una vez que obtengas el radio, la tabla a continuación te muestra cómo determinar el volumen para cada cilindro. La hoja de papel mide 8 1/2 pulgadas por 11 pulgadas.

Cilindro	Circunferencia de base (pulgadas)	Radio (pulgadas) r	Altura (pulgadas) h	Volumen (pulgadas cúbicas) π • r • r • h
Corto	11	11 ÷ (2π) or about 1.75	8.5	π • 1.75 • 1.75 • 8.5 Aprox. 81.8
Alto	8 1/2= 8.5	8.5 ÷ (2π) or about 1.35	11	π • 1.35 • 1.35 • 11 Aprox. 63.0

El volumen del cilindro más corto es de 82 pulgadas cúbicas, y el volumen del cilindro más alto es de 63 pulgadas cúbicas.

## **Experimento:**

- Ve al supermercado y mira qué artículos vienen en cilindros de diferentes formas o tamaños.
- Mira en tu aparador o ve al supermercado. Encuentra dos envases de formas distintas que contengan la misma cantidad. ¿Cuál es el contenido de cada uno?

## Retos adicionales:

- ¿Para qué tamaño de papel los dos cilindros guardarían la misma cantidad?
- 2. Usando cualquier hoja de papel rectangular, ¿El cilindro más corto siempre contiene más?

3. Otra forma de describir un cilindro es hacer girar una tarjeta de índice sobre uno de sus lados. Piensa sobre el cilindro trazado por una tarjeta de 3 por 5 a medida que gira. ¿Cuál es mayor: el volumen que forma el cilindro cuando la tarjeta de mueve en un lado más corto o más largo?



4. Digamos que tienes dos pedazos de alambre de igual longitud. Dobla los alambres para hacer dos rectángulos. ¿Piensas que los dos rectángulos siempre tendrán la misma área?

## Algo para pensar:

- ¿Qué artículos vienen en envases cilíndricos?
- ¿Qué tipos de artículos se envasan en cajas en vez de cilindros?
   ¿Por qué piensas que las compañías usan cajas?
- Si un número es mayor de 1, elevarlo al cuadrado hace que el resultado sea mayor.

## ¿Sabías que...?

- Diseñar latas y etiquetas es solo un aspecto de la tecnología de empaque. Puedes ver los resultados de este trabajo cada vez que quitas la envoltura de un disco compacto, abres un lápiz de labios o una lata de refresco.
- Varias universidades ofrecen carreras en tecnología de empaque.
   Muchas se pueden encontrar en packaging.hp.com/pkgschools.htm
- Las figuras isoperimétricas son figuras con el mismo perímetro.
   Los problemas de cercado a menudo caen bajo esta categoría.

## Recursos:

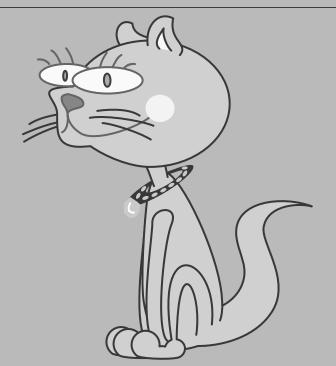
### Libros:

- Lawrence Hall of Science. Equals Investigations: Flea-Sized Surgeons.
   Alsip, IL: Creative Publications, 1994.
- Lappan, G., J. Fey, W. Fitzgerald, S. Friel, and E. Phillips. Connected Mathematics: Filling and Wrapping. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1996.

## Respuestas a retos adicionales:

Puede que los rectángulos no siempre tengan la misma superficie. Considera un pedazo de alambre de 16 pulgadas con una superficie de 16 pulgadas cuadradas, o un rectángulo de 1 pulgada por 7 pulgadas que tenga una superficie de 7 pulgadas cuadradas.
$\pi \circ 3 \circ 5 \circ \pi$
(3.) El cilindro con el volumen más grande se describe cuando la tarjeta gira sobre su lado más corto. Este problema compara π • 5 • 5 • 3 γ
(2.) Sí. (Esto se puede comprobar matemáticamente.)
hojas de papel cuadradas.
Los dos cilindros guardarían la misma cantidad solamente en
 (.1)

Notas:		







## ¿Por qué no son cuadradas las tapas de acceso?



¡Resuélvelo! ¿Por qué la mayoría de las tapas de acceso son redondas?

**Pista:** Investiga tapas de acceso de distintas formas para ver si caen por sus respectivos agujeros.

Las formas de muchos objetos se relacionan directamente a sus usos. Las herramientas se diseñan con formas que son fáciles de

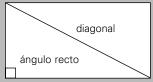
> sostener, los muebles con formas que son cómodas y los autos de carrera para reducir la resistencia del viento.

## Comienza:

Corta un rectángulo y un círculo de una tarjeta o cartulina de 3 por 5. Mira cuál puede caer fácilmente por el agujero que queda en el cartón.

## Solución completa:

Una tapa de acceso descansa sobre una pequeña pestaña en el agujero. Una tapa de acceso circular típicamente no cae en el agujero porque el ancho es igual a su alrededor. Una tapa de acceso rectangular, sin embargo, podría caer por el agujero cuando se levanta de un extremo. Puedes ver esto al dibujar una línea diagonal en un rectángulo para crear dos triángulos. Matemáticamente, el ángulo más grande de un triángulo se opone al lado más largo. El ángulo más grande en cada triángulo formado por la línea diagonal es el ángulo recto de la esquina.



Esto significa que la diagonal de un rectángulo siempre es más larga que cualquiera de los lados. Como resultado, las tapas rectangulares siempre pueden caer por los agujeros correspondientes si las pestañas son pequeñas. Ya que un cuadrado es un rectángulo, se aplica el mismo razonamiento a los cuadrados.

## **Experimento:**

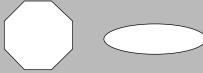
- Mira a tu alrededor y encuentra algunos triángulos. Decide cuál ángulo es el más grande y comprueba si se opone al lado más largo. Corta un triángulo de un pedazo de cartón para ver si puede caer fácilmente por el agujero que quedó donde lo cortaste.
- En una tarjeta, dibuja un triángulo con todos los lados de la misma longitud (un triángulo equilátero). Luego, dibuja arcos alrededor del triángulo, usando cada esquina como el centro de un círculo y el largo de un lado del triángulo como el radio. (Mira el siguiente diagrama.)



Esto significa que la diagonal de un rectángulo siempre es más larga que cualquiera de los lados. Como resultado, las tapas rectangulares siempre pueden caer por los agujeros correspondientes si las pestañas son pequeñas. Ya que un cuadrado es un rectángulo, se aplica el mismo razonamiento a los cuadrados.

## Retos adicionales:

- 1. ¿Las siguientes formas serían buenas tapas de acceso?
- 2. Nombra una forma tridimensional que tiene el mismo ancho a todo su alrededor.



## Algo para pensar:

- Un círculo se conoce como una "curva de ancho constante". ¿Por qué supones que tales curvas tienen este nombre? ¿Puedes pensar en otra forma que tenga un ancho constante? ¿La figura que creaste en la sección "Experimento" anterior tiene un ancho constante?
- Cualquier tapa de acceso que no sea una curva de ancho constante caería por el agujero?

## ¿Sabías que...?

- Una broca de taladro basada en la forma tríangular de la sección "Experimento" corta un agujero cuadrado.
- Las bases de las botellas de Pepto-Bismol™ tienen formas como la de la sección "Experimento".
- Se usan tapas de acceso triangulares en algunas partes de Minnesota.
- El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) estudió las curvas de ancho constante.
- Los triángulos Reuleaux fueron así nombrados por Franz Reuleaux (1829-1905), ingeniero, matemático y maestro de escuela superior alemán.

## Recursos:

## Libros:

- Gardner, Martin. Mathematics, Its Spirit and Use. New York:
   W. H. Freeman, 1978.
- Maletsky, Evan. "Curves of Constant Width." In Teaching with Student Math Notes, Vol. 2. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.
- Melnick, Mimi. Manhole Covers. Cambridge, MA: MIT Press, 1994.

## Respuestas a retos adicionales:

Una esfera.

alrededor.

Ninguno sería una buena tapa, porque el ancho no es igual a su





# ¿Cómoolgæste rótulo?

¡Resuélvelo! ¿Qué letras, escritas en minúsculas, se podrían leer al revés de la misma manera que al derecho?

Pista: Escribe cada letra minúscula y mírala de distintas maneras.

NOTOR ott DOLL .

La simetría es un concepto básico de la geometría. Entender cómo una parte de un objeto refleja el resto es importante en arte, diseño, medicina otros campos.

## Comienza:

Escribe en letra de molde las letras minúsculas del abecedario. Coloca la hoja cabeza abajo.

## Solución completa:

Las letras que se leen de la misma manera al revés son I, o, s, x, z.

## **Experimento:**

- Distorsiona las letras un poco y mira si puedes escribir tu nombre de manera que se pueda leer igual ya sea hacia atrás, hacia adelante o al revés. Por ejemplo, las palabras "al revés" que aparecen arriba están distorsionadas de manera que se pueden leer cuando se giran 180 grados.
- Mira a tu alrededor y ve si puedes encontrar formas que se vean iguales hacia adelante, hacia atrás, al revés y al derecho.
- Mira en las Páginas Amarillas para encontrar logotipos de compañías que se vean iguales cuando se miran desde distintas direcciones.

### **Retos adicionales:**

- 1. Al escribirse en letras minúsculas, el nombre de un equipo deportivo profesional se puede leer de la misma manera tanto al revés como al derecho. ¿Qué equipo es?
- 2. Crea palabras que se deletreen de la misma manera hacia adelante o hacia atrás. Tales palabras se conocen como palíndromos.
- 3. Crea oraciones que se lean de la misma manera hacia adelante o hacia atrás cuando no se tiene en cuenta la puntuación.
- 4. ¿Qué horas se pueden leer de la misma manera de distintas direcciones en un reloj digital?
- 5. Algunas letras pueden girarse 180° (o un medio círculo) para formar letras distintas; por ejemplo, la "d" se convierte en "p". ¿Qué otras letras minúsculas se pueden girar para formar letras diferentes?

## Algo para pensar:

- ¿Una figura humana tiene simetría?
- ¿Cómo se usa la simetría en el diseño de un molinete?
- ¿Hay simetría en la naturaleza?

## **Experimento:**

Encuentra la simetría, si la hay, en cada uno de lo siguiente:

• un plato • un tazón • un tenedor • una silla

## ¿Sabías que...?

- Scott Kim llama todo lo que se pueda leer en más de una manera una "inversión". Él usaba tales escritos al desarrollar nuevos sistemas de fuentes de tipos para computadoras.
- El artista gráfico John Langdon de Filadelfia ha desarrollado escritos similares a los de Kim, a los cuales él llama "ambigramas".
- El artista M.C. Escher usó muchos tipos de simetrías al diseñar sus famosos teselados.
- Un círculo y una esfera tienen la mayor simetría de cualquier objeto geométrico.

 Una figura con líneas de simetría tanto horizontal como vertical también tiene simetría rotacional de 180°, pero a la inversa no es lo mismo.

## Recursos:

## Libros:

- Ernst, Bruno. *The Magic Mirror of M. C. Escher.* Stradbroke, England: Tarquin Publications, 1985.
- Kim, Scott. Inversions: A Catalog of Calligraphic Cartwheels. Petersborough, NH: BYTE Books, 1981.
- Kim, Scott. *Poster: Alphabet Symmetry*. White Plains, NY: Cuisenaire/Dale Seymour Publications. **www.cuisenaire-dsp.com**
- Kim, Scott. Poster Set: Inversions. White Plains, NY: Cuisenaire/Dale Seymour Publications. www.cuisenaire-dsp.com
- Langdon, John. Wordplay: Ambigrams and Reflections on the Art of Ambigrams. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1992.
- McKim, Robert H. *Experiences in Visual Thinking*. Belmont, CA: Brooks/Cole Publishing Company, 1972.
- McKim, Robert. Thinking Visually. White Plains, NY Cuisenaire/Dale Seymour Publications, 1997. www.cuisenaire-dsp.com

### Créditos:

Ilustración Copyright © 1981 Scott Kim, www.scottkim.com7

## Respuestas a retos adicionales:

(5.) La letra "m" se convierte en "w", la "n" se convierte en "u" y la "b" se convierte en "q".

Múmeros tales como el 0, 1, 2 y 8 se leen igual de distintas maneras en un reloj digital. Las horas en un reloj digital que se leen de la misma manera hacia adelante y hacia atrás incluyen las 10:01, 11:11 y 12:21.

"Madam, I'm Adam" (en inglés)

3.)

Palabras como MOM, DAD y TOOT en inglés se deletrean igualmente al derecho y hacia atrás. El símbolo internacional de socorro, SOS, es una serie de letras que se pueden leer de la misma manera hacia atrás, hacia adelante, al derecho y al revés, así como volteadas.

savar ir

Los Phoenix Suns. La palabra "suns" se lee de la misma manera

(.r)







¿Cómo puedes ir directamente a la tienda cuando hay edificios en el camino?

¡Resuélvelo! Caminando por la acera, ¿cuántas maneras diferentes hay de ir de la casa a la tienda de video? ¡No puedes retroceder!

Pista: Trata menos bloques para comenzar.

Contar es una importante destreza para las matemáticas. Las compañías de entregas y las líneas aéreas cuentan el número de rutas de viajes para ir de un sitio a otro.

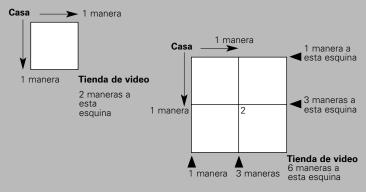


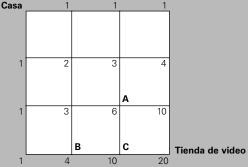


¿Cuántas maneras habría si tu casa y la tienda estuvieran en esquinas opuestas del mismo bloque? ¿Y si la tienda estuviera a dos bloques de distancia? ¿Tienes que contar tanto las rutas que comienzan en el sur y en el este por separado?

## Solución completa:

Mira el caso más simple y cuenta el número de maneras de ir a cada esquina. En los dibujos que siguen, por ejemplo, las flechas fueron añadidas para mostrar la dirección. Los números indican cuántas maneras hay de llegar a cada esquina.





Para llegar a la esquina C, primero tienes que pasar ya sea por la esquina A o B. Hay 6 maneras de llegar a la esquina A, y 4 maneras de llegar a la esquina B, haciendo un total de 10 maneras de llegar a la esquina C. Por lo tanto, hay 20 maneras de ir de la casa a la tienda de video.

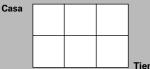
## **Experimento:**

Encuentra la ruta más corta de ir de tu casa a la escuela.
 ¿Hay rutas diferentes de longitud similar?

## **Retos adicionales:**

1. ¿Cuán larga es la ruta más corta de la casa a la tienda de video en el reto?

2. ¿Cuántas maneras hay de ir de la casa a la tienda de video en el siguiente mapa?



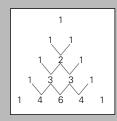
Tienda de video

## Algo para pensar:

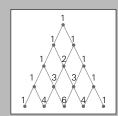
- ¿Por qué escoger rutas eficientes es importante para las compañías de transporte?
- ¿Qué otros trabajos requieren escoger rutas eficientes?

## ¿Sabías que...?

Blaise Pascal fue un matemático francés en el siglo diecisiete.
 Trabajó con un patrón de números (el Triángulo de Pascal) para resolver muchos problemas de contar. El Triángulo de Pascal es formado al colocar números "1" a los largo de dos "lados" del triángulo y luego añadiendo los dos números arriba a la derecha y a la izquierda del próximo número en el patrón.



• El Triángulo de Pascal se puede usar para resolver el reto.



 Contar con patrones mediante el triángulo de Pascal apareció en el libro Espejos Preciados de Cuatro Elementos de Chu Shih-chieh, un libro publicado en China en siglo catorce.

 Análisis combinado es una rama de la matemática que tiene que ver con problemas de contar como el que aparece en este reto.

### Recursos:

## Libros:

- Gardner, Martin. "Pascal's Triangle" in Mathematical Carnival.
   Washington, DC: Mathematical Association of America, 1989.
- Seymour, Dale, and Margaret Shedd. Finite Differences. White Plains, NY: Dale Seymour Publications, 1997. www.cuisenairedsp.com
- Seymour, Dale. Visual Patterns in Pascal's Triangle. White Plains, NY: Dale Seymour Publications, 1986. www.cuisenaire-dsp.com

## Sitio web:

www.studyweb.com/math

# Respuestas a retos adicionales: Hay 10 maneras de ir. Todas de las 20 rutas tienen la misma longitud, 6 bloques. Notas:



00



dinero di

¡Resuélvelo! ¿Preferirías trabajar 7 días a la semana a \$20 al día, o que te pagaran \$2 por el primer día y que tu salario se multiplicara al doble cada día por una semana?

Los patrones de números pueden cambiar a tasas diferentes.

Entender las tasas de cambio es importante para

la banca, la biología y la economía.

## Comienza:

¿Cuánto ganarías el primer día usando cada método? ¿El segundo día? ¿Cuáles serían tus ganancias totales al final del segundo día?

## Solución completa:

Si se te pagan \$20 por día por 7 días, entonces ganas \$20 x 7, o sea \$140. Si se te pagan \$2 el primer día y tu salario se multiplica al doble cada día por los próximos 6 días, entonces ganas \$2 + \$4 + \$8 + \$16 + \$32 + \$64 + \$128, o sea \$254. Con el segundo método ganas más dinero al final de la semana.

## **Experimento:**

- Toma un pedazo de papel de cualquier tamaño. Dóblalo por la mitad. ¿Cómo se compara el espesor del papel doblado con el papel sin doblar? Repite este proceso, contestando la pregunta cada vez. ¿Cuántas veces puedes doblar el papel? ¿El tamaño del papel con el que comenzaste hace alguna diferencia? ¿Cuán grueso es el papel cuando ya no puedes doblarlo más?
- Usa una calculadora para contar de 3 en 3. En otras palabras, haz que la calculadora muestre la frecuencia 3, 6, 9, 12,...¿La puedes hacer multiplicar por 3?

## **Retos adicionales:**

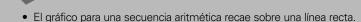
- 1. Si los métodos de paga descritos en el "Reto" se fueran a llevar a cabo por un mes, ¿cuánto dinero te habrías ganado totalmente al día 30?
- 2. ¿Qué proceso se usa para generar cada uno de los siguientes patrones?
- Taza, pinta, cuarto, medio galón y galón.
- Centavo, moneda de diez centavos, dólar, diez dólares, cien dólares y así sucesivamente.

## Algo para pensar:

- ¿Cómo aumenta la cantidad de dinero en una cuenta de ahorros?
- ¿Cómo determinan los bancos el pago de intereses ante el principal en los préstamos?

## ¿Sabías que...?

- La radioactividad es a menudo descrita por una "media vida", el tiempo requerido para que la mitad del material radioactivo se descomponga.
- Contar de 1 en 1 es un ejemplo de una secuencia aritmética.
- Una secuencia como 2, 5, 8, 11..., en la cual añades 3 cada vez, es también una secuencia aritmética.
- Una secuencia como 2, 6, 18, 54..., en la cual multiplicas por 3 cada vez, es una secuencia geométrica.



## **Recursos:**

### Libros:

- Page, D., K. Chval, and P. Wagreich. Maneuvers with Number Patterns. White Plains, NY: Cuisenaire/Dale Seymour Publications, 1994. www.cuisenaire.com
- Seymour, Dale, and Ed Beardslee. Critical Thinking Activities in Patterns, Imagery and Logic. Vernon Hills, NY: ETA 1997.
   www.etauniverse.com

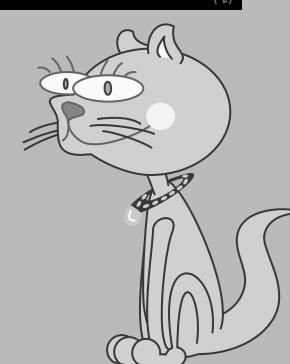
### Software:

 "Bounce" (conjunto de software de computadoras). Pleasantville, NY: Sunburst Communications, 1999. www.sunburstdirect.com

## Respuestas a los retos adicionales:

En términos de tazas, el patrón es 1 taza, 2 tazas, 4 tazas, 8 tazas, 16 tazas. Cada medida es el doble de la anterior. En la secuencia de dinero, cada cantidad es 10 veces la anterior, dando 1 centavos, 10 centavos, 100 centavos y así sucesivamente.

\$600 por el primer método y \$2,147,483,646 por el segundo.









# ¿Cómo puedes usar sellos? VIEJOS? ? ?

¡Resuélvelo! Digamos que encontraste un rollo viejo de sellos de 15¢. ¿Podrías usar una combinación de sellos de 33¢ y de 15¢ para enviar un paquete por exactamente \$1.77?

**Pista:** Usa tantos sellos de 33¢ como puedas, para que el resto se pueda completar con sellos de 15¢.

Este problema implica usar combinaciones de números para hacer otros números. Se usan procesos similares para desarrollar códigos a fin de mantener la seguridad en los bancos y en el acceso a computadoras.



## Comienza:

¿Qué pasaría si tratas de usar sellos de 33¢ solamente o de 15¢ solamente? ¿Cuál es el franqueo más cercano que puedes obtener si usas sellos de 33¢ solamente?

## Solución completa:

Hay muchas maneras de resolver el problema.

- Usando la pista dada arriba, divide 177 por 33. Con cinco sellos de 33¢, tienes \$1.65 de franqueo y necesitas 12 centavos más. Con cuatro sellos de 33¢, tienes \$1.32 de franqueo y necesitas 45 centavos más. Ya que tres sellos de 15¢ hacen 45¢, una solución es cuatro sellos de 33¢ y tres de 15¢.
- Otra estrategia es hacer una tabla con un listado de todas las combinaciones posibles de sellos de 33¢ y de 15¢ que se pueden usar.

Cantidad de sellos de 33¢	Cantidad de sellos de 15¢	Valor
6	0	\$1.98
5	0	\$1.65
5	1	\$1.80
4	1	\$1.47
4	2	\$1.62
4	3	\$1.77

 Haz una tabla combinada y llénala hasta que llegues a \$1.77 o superes esa suma en cada fila y columna. La primera fila tiene valores de un número en aumento de sellos de 33¢ y la primera columna los valores de un número en aumento de sellos de 15¢. Las casillas restantes son las combinaciones de los dos.

		Candidad de sellos de 33¢						
		1	2	3	4	5	6	
Candida de sellos de 15¢		\$.33	\$.66	\$.99	\$1.32	\$1.65	\$1.98	
1	\$.15	\$.48	\$.81	\$1.41	\$1.47	\$1.80		
2	\$.30	\$.63	\$.96	\$1.29	\$1.62	\$1.95		
3	\$.45	\$.78	\$1.11	\$1.44	\$1.77			
4	\$.60	\$.93	\$1.26	\$1.59	\$1.92			
5	\$.75	\$1.08	\$1.41	\$1.74	\$2.07			
6	\$.90	\$1.23	\$1.56	\$1.89				
7	\$1.05	\$1.38	\$1.71	\$2.04				
8	\$1.20	\$1.53	\$1.86					
9	\$1.35	\$1.63	\$2.01					
10	\$1.50	\$1.83						
11	\$1.65	\$1.98						
12	\$1.80							

 Otra manera de trabajar el problema es darse cuenta de que usar solamente sellos de 15¢ hace que el total termine en ya sea 0 ó 5. Ahora mira la cantidad de sellos de 33¢ que se pueden usar para obtener un total que termine en ya sea 2 ó 7.

## **Experimento:**

 Compara la manera más barata de enviar un paquete usando ya sea el Servicio Postal de los EE.UU., Federal Express o United Parcel Service.

## **Retos adicionales:**

- 1. Usando solamente sellos de 33¢ y de 15¢, ¿puedes componer cualquiera de estos franqueos?
  - a. \$2.77 b. \$4.77 c. \$17.76
- 2. ¿Se puede componer cada número entero mayor de 1 al sumar alguna combinación de dos v tres?

## Algo para pensar:

 Los sellos de correo aéreo, que cuestan más que los de correo de primera clase, una vez fueron muy populares para el correo nacional. ¿Por qué piensas que ya no es así hoy día?

## ¿Sabías que...?

- El franqueo para un sello de primera clase el 6 de julio de 1932 era 3¢.
   Permaneció a ese precio hasta el 1º de agosto de 1958, cuando subió a 4¢.
- El precio por un sello de primera clase cambió dos veces en 1981, a 18¢ en marzo y a 20¢ en noviembre.
- Más de 400 sellos conmemorativos de 32¢ se emitieron entre el 1º de enero de 1995 y el 31 de diciembre de 1998.
- El 3 de marzo de 1997, se emitieron dos sellos triangulares que mostraban un barco y una carreta.
- Diofantio (ca. 250) es conocido como el padre del álgebra. Las ecuaciones del tipo de las de este reto se llaman ecuaciones diofantinas.
- El Algoritmo de Euclides se puede usar para resolver este reto.

## Recursos:

### Libros:

- New York Times World Almanac and Book of Facts 1999, New York: World Almanac Books, 1999.
- "Media Clips." Mathematics Teacher 92 (April 1999): 336-338.

## Sitios web:

- Oficina Postal de los EE.UU. www.usps.gov
- Museo Postal Nacional www.si.edu/postal
- Sitios postales extranjeros www.upu.int/web/An

Respuestas a retos adicionales:	
(2.) Si.	
c. Si. Ya sabes cómo hacer \$1.77 y \$3.00 de franqueo. Haz incrementos de \$3.00 usando veinte sellos de 15¢. Cinco conjuntos de \$3.00 además del conjunto para \$1.77 equivalen \$16.77. Ya que \$18.77 es es 99¢ más que \$16.77, necesitas tres sellos adicionales de 33¢. Los \$17.76 en franqueo se pueden hacer usando treinta y dos sellos de 33¢ y cuarenta y ocho de 15¢, o ciento tres sellos de 15¢ y siete de 33¢.	
b. Si. Ya sabes cómo hacer \$1.77 de franqueo. Haz los \$3.00 adicionales usando cinco sellos de 33¢ y nueve de 15¢, o veinte sellos de 15¢. Tanto doce sellos de 15¢ como nueve sellos de 33¢ o veinte y tres sellos de 15¢ y cuatro sellos de 33¢ hacen \$4.77 en franqueo.	
s. No. No hay manera de hacer el dólar adicional de franqueo de combi- naciones de sellos de 33¢ y de 15¢. (Nota que 100 no es un múltiple de 3, como lo son 33 y 15. También, no hay otras combinaciones que funcionan.)	
Estos retos animan soluciones basadas en el razonamiento del reto original.  Estos retos animan soluciones basadas en el razonamiento del reto original.	
Notas:	





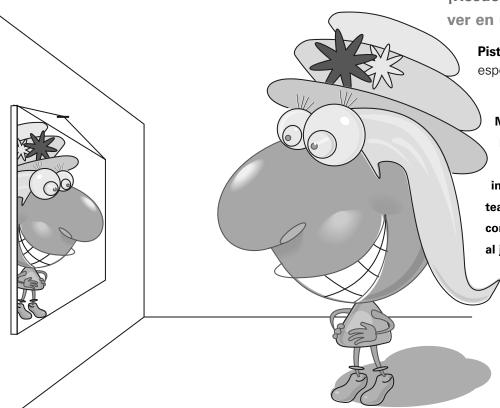
## "Espejito, espejito, ¿qué es lo que veo? Veo más de mí cuando retrocedo?"

¡Resuélvelo! ¿Cuánto de ti puedes ver en un espejo?

Pista: Comienza midiendo la altura del

espejo y cuánto de ti que puedes ver.

Mirar en espejos implica ángulos, reflejos, líneas de vista y triángulos. Entender cómo estas cosas se relacionan es importante en el diseño de escenarios, teatros y sistemas de seguridad. Tales conocimientos también pueden ser útiles al jugar billar, raquetbol, tenis y algunos juegos de video.



## Comienza:

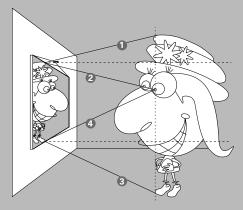
Comienza parándote a 2 pies de una pared. Haz que un amigo sostenga un espejo pequeño contra la pared, para que solamente puedas ver una porción de ti, retrocede y mira si puedes ver más de ti.

## Reto:

Mide la altura del espejo. Mide cuánto de ti puedes ver en este espejo (la parte superior a la parte inferior de lo que puedes ver). Compara las medidas. Prueba otros espejos. Párate en lugares distintos. Haz un dibujo. Coloca las medidas en tu dibujo. ¿Qué puedes notar?

## Solución completa:

El dibujo muestra que puedes ver el doble de ti que la longitud del espejo. Digamos que el espejo está colgado verticalmente contra la pared, de modo que la parte superior del espejo quede a la mitad entre tu ojo y la parte superior de tu sombrero. Las líneas 1 y 2 son las "líneas de vista" desde tu ojo hasta el espejo, y desde el espejo hasta la parte superior de tu sombrero. Las líneas 3 y 4 muestran las "líneas de vista" desde tu ojo al espejo y desde el espejo hasta tu pie. Las líneas horizontales entrecortadas muestran las alturas de las partes superior e inferior del espejo. La distancia desde la parte superior de tu sombrero a la línea entrecortada que indica la parte superior del espejo es la misma que la distancia entre la línea y tu ojo. La distancia desde tu ojo a la línea entrecortada que indica la parte inferior del espejo es la misma que la de esta línea a tu pie. Por lo tanto, puedes ver el doble de la longitud del espejo.



Trata de dibujar la figura más cerca del espejo o más distante. Aunque cambien los ángulos, la parte del cuerpo visible en el espejo es siempre el doble de la longitud del espejo.

## **Experimento:**

 Usa cinta adhesiva para pegar un extremo de cada uno de tres cordones largos a la parte inferior del espejo. Retírate del espejo y sostén un cordón hacia tu ojo. Haz que tu amigo sostenga un segundo cordón horizontalmente al piso y adhiérelo a tu cuerpo donde lo toque. Completamente de pie, mira en la parte inferior del espejo y haz que tu amigo adhiera el tercer cordón al punto más inferior en ti que puedas ver. (Doblarte hacia adelante puede afectar el resultado, así que trata de mantenerte derecho(a).)

Haz que tu amigo cuidadosamente mida la distancia de tu ojo al segundo cordón y del segundo al tercero. ¿Están cercanas a las mismas distancias? (¡Lo deberían estar!)

Retrocede y trata de nuevo. ¿Las medidas cambiaron?

## Retos adicionales:

- 1. Si una persona puede ver todo su cuerpo en un espejo de 42 pulgadas, ¿Cuál es su altura?
- 2. Si tuvieras un espejo de 42 pulgadas, ¿dónde lo colocarías en la pared para que puedas ver todo tu cuerpo?
- 3. Si deseas poder verte completamente de cabeza a pies en un espejo, ¿cuán grande tiene que ser el espejo y dónde lo debes colgar en la pared?

## Algo para pensar:

- Muchas casas de diversiones y centros comerciales tienen espejos curvos. ¿Qué ves cuando te miras en tales espejos? ¿Qué pasa cuando retrocedes frente a ese espejo?
- ¿Qué tipos de espejos te hacen verte más grande? ¿Más pequeño(a)?
- Digamos que un amigo está parado directamente detrás de ti, sin moverse, cuando te miras en un espejo. Cuando te mueves para adelante o hacia atrás, ¿ves más o menos de tu amigo?
- Si te paras delante de un mostrador mirando a un espejo y retrocedes, ves más de ti, ¿por qué?

## ¿Sabías que...?

- De acuerdo a BBC World News, el proyecto espacial ruso Znamya ha tratado de colocar un espejo grande en órbita espacial para reflejar la luz del sol a ciudades en el norte.
- El ser humano más alto en récord medía 8 pies, 11.1 pulgadas de alto. Robert Pershing Wadlow (1918-1940) hubiera necesitado un espejo de 54 pulgadas para verse de pies a cabeza.
- Un reflejo es una isometría, un movimiento geométrico que preserva la distancia.

## Recursos: Libros: • Desoe, Carol. Activities for Reflect-It™ Hinged Mirror. White Plains, NY: Cuisenaire Company of America, 1994. • Walter, Marion. The Mirror Puzzle Book. Jersey City, NJ: Parkwest Publications, Inc., 1985. Películas: • Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics. A Private Universe. Washington, DC: Annenberg/CPB Math and Science Collection, 1987. [Los materiales incluyen un videocasete de 20 minutos y una Guía para Maestros de A Private Universe.] www.learner.org Sitio web: • Enlace a un artículo sobre el proyecto ruso para el espejo espacial, Znamya 2.5: news.bbc.co.uk/hi/english/sci/tech/newsid\_272000/272103.stm Respuestas a retos adicionales:

		olo on l	ممیط			nielini				n. n	ananh
		sojo sut y									
	ojaqsa le	nferior de	i ətte	e la b	e dne	maner	әр с	olgarlo	oo sə	Deb	altura.
ทา	an anuad	an olade:	ı anı	าทาเค	ם וחוו	וומוי/ ד	alaini	ובוח מ	IAIII	ud is	ואווום ב

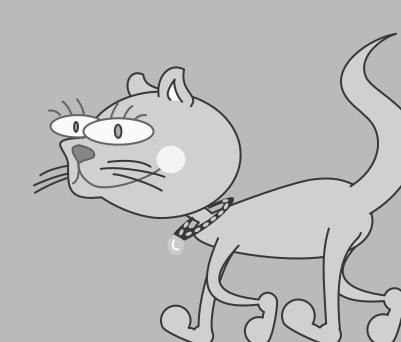
(3.)

Esto depende de tu altura. La parte superior del espejo debe estar a por lo menos 2 a 3 pulgadas sobre el nivel de tus ojos para que puedas ver la parte superior de tu cabeza. A menos que midas más de 84 pulgadas, puedes entonces ver tus pies.

Lo que ves en el espejo es el doble de la longitud del espejo. Una persona que mida 84 pulgadas o menos se puede ver completamente en tal espejo.

**(:1**)

Notas:			







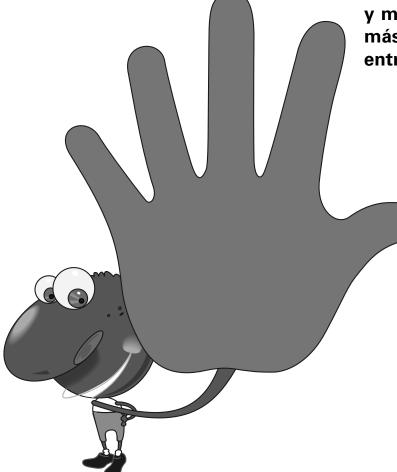
## A B R Ededos

y mírate la mano. ¿La gente con manos más grandes tienen ángulos más grandes entre sus dedos?

¡Resuélvelo! Calcula las medidas de los ángulos entre tus dedos cuando abres tu mano.

**Pista:** Cuando abres tu mano para que tu pulgar y dedo índice formen una "L" el ángulo que forman mide aproximadamente 90°.

Los ángulos son formas geométricas importantes. Se usan para diseñar muchas cosas, desde aviones a palos de golf.

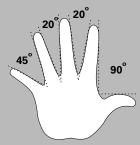


## Comienza:

La medida del ángulo entre tu dedo pulgar y tu dedo índice cuando tu mano toma forma de "L" es aproximadamente 90°. ¿Cómo se comparan las medidas de los ángulos para los demás dedos con esta medida de ángulo? ¿La medida del ángulo es más grande o pequeña? ¿Es la mitad? Dibuja el ángulo de 90° entre tu dedo pulgar e índice. Dibuja un ángulo que mida la mitad de esa medida. Usa tu dibujo para calcular las medidas de los demás ángulos.

## Solución completa:

El ángulo más grande, entre el dedo pulgar y el dedo índice, mide aproximadamente 90°. (Un ángulo de 90° es un ángulo recto.) Las otras medidas de ángulos varían en algo, dependiendo de la persona. A continuación se ilustra una posibilidad:



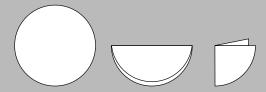
La longitud de los dedos no afecta la medida de los ángulos.

## **Experimento:**

- Mide un ángulo haciendo tu propio medidor de ángulos o transportador, mediante los siguientes pasos.
- 1. Corta una pieza circular de papel de cera u otro papel liviano. (Quizás quieras calcar el fondo de una taza grande.)



2. Dobla el círculo por la mitad y luego dobla el resultado por la mitad.



3. Desdobla el papel y abre el círculo. Debes ver 4 ángulos rectos en el centro del círculo. Cada ángulo recto mide 90°.



- 4. Vuelve a doblar el círculo en las mismas marcas de doblaje. Luego dobla el papel por la mitad una vez más. Desdobla el papel para revelar 8 ángulos, cada uno de los cuales mide 45°.
- 5. Vuelve a doblar el papel en las marcas anteriores. Luego dóblalo por la mitad una vez más. ¿Cuán grande es cada nuevo ángulo? Identifica cada ángulo con la medida apropiada.
- 6. Para medir un ángulo con tu transportador, coloca el centro del círculo en el punto del ángulo y alinea una de las marcas con un lado del ángulo. Calcula la medida del ángulo, encontrando dónde el otro lado se alinea con el transportador.

### Retos adicionales:

- Digamos que una rueda de bicicleta da una vuelta exacta. Esto es una revolución de 360°. ¿Cuán lejos se hubiera movido la rueda en el terreno?
- 2. En una brújula, el norte tiene una dirección de 0°. ¿Cuál es tu dirección cuando vas hacia el este, el sur o el oeste?
- 3. ¿Cuál es la medida del ángulo entre las manecillas de un reloj si una de ellas está en el 12 y la otra en el 1?



4. ¿Qué piensas que debe ser un ángulo negativo?

## Algo para pensar:

- ¿Por qué piensas que Tiger Woods se preocupa por el ángulo en el cual le pega a una pelota de golf?
- ¿Qué ángulos son importantes al diseñar una bicicleta? ¿Por qué?
- Muchas sillas se reclinan o se recuestan. ¿Qué tipo de ángulos puedes hacer en una silla reclinable o en el asiento de conductor de un auto?
- Se forman ángulos en las ramas de árboles y en las nervaduras de una hoja. ¿Cuán grandes son estos ángulos?
- ¿Qué tipos de ángulos encuentras en una caja de cereal?

## ¿Sabías que...?

- Las piernas y la parte superior del cuerpo de un astronauta que flota en el espacio forman un ángulo natural de aproximadamente 128°.
- Las personas que se recuperan de cirugía de las rodillas miden su progreso al lograr flexibilidad a cierta medida de ángulo.
- Para medir ángulos entre coyunturas, los cirujanos ortopédicos y los terapeutas físicos usan un instrumento llamado un goniómetro.
- La medida de un ángulo se relaciona al sistema numérico de los antiguos habitantes de Babilonia.
- Los ángulos pueden ser medidos en radianes, grados centesimales y grados.

## **Recursos:**

### Libros:

- Desoe, Carol. Activities for Reflect-It ™ Hinged Mirror. White Plains, NY: Cuisenaire Company of America, 1994. www.cuisenaire-dsp.com
- Greenes, Carole, Linda Schulman-Dacey, and Rika Spungin. Geometry and Measurement. White Plains, NY: Dale Seymour Publications, 1999. www.cuisenaire-dsp.com
- Page, David A., Philip Wagreich, and Kathryn Chval. Maneuvers with Angles. White Plains, NY: Dale Seymour Publications 1993.
   www.cuisenaire-dsp.com

## Respuestas a retos adicionales:

qileccion obnesta.

 ${\sf Si}$  los ángulos positivos se miden en una dirección (por ejemplo, en sentido antihorario), los ángulos negativos se medirían en la

(.<del>.</del>)

Notas:

El ángulo tiene una medida de 30° porque 12 ángulos de 30° cada uno hacen 360°. Cada uno de los demás ángulos formados de manera similar también miden 30°.

(3.) aè l⊒

90°, 180° y 270°, respectivamente.

(.S)

La respuesta depende del tamano de la rueda. Puedes encontrar esta distancia conduciendo un experimento. Marca la llanta en un punto donde toque el piso y marca el punto en el piso. Haz rodar la bicicleta hacia adelante hasta que la marca quede una vez más en el piso. Otra manera de encontrar la respuesta es medir el diámetro de la rueda y luego aplicar el hecho de que la distancia en al piso. Otra manera de encontrar la respuesta es medir el diámetro de la rueda y luego aplicar el hecho de que la distancia alrededor de un círculo es su circunferencia. La circunferencia de un círculo = • diámetro, donde es aproximadamente 3.14.






## ¿Qué es redondo, duro y se vendió por \$3 millones?



¡Resuélvelo! Mark McGwire se proclamó rey de los jonrones del béisbol en 1998, con 70 cuadrangulares. La pelota de su jonrón número 70 se vendió por más de \$3 millones en 1999. Babe Ruth, rey de los jonrones más antiguo, bateó 60 en 1927. Su pelota de jonrón fue donada al Salón de la Fama. Digamos que la pelota de Ruth fue valorizada por \$3000 en 1927 y que como muchas buenas inversiones, su valor se multiplicó cada siete años. ¿Preferirías tener el valor de la pelota de Ruth o de McGwire?

**Pista:** ¿Cuántas veces tendrías que multiplicar el valor de la pelota de Ruth para llegar al valor de la de McGwire?

El interés compuesto y la tasa de cambio con el tiempo afectan muchas cantidades. Los banqueros, corredores de acciones y biólogos de población tienen que entender este tipo de cambio en sus trabajos.

## Comienza:

Asume que la pelota de Ruth fue valorizada en \$3000 en 1927. ¿Cuál fue su valor siete años más tarde? Trata de hacer una tabla.

## Solución completa:

Digamos que la pelota de Ruth tenía un valor de \$3000 en 1927. Si el precio se multiplicó en siete años, la pelota tendría un valor de \$6000 en 1934. En siete años más, su valor se multiplicaría a doble nuevamente.

Año	Valor
1927	3000
1934	2 · 3000 = 6000
1941	$2 \cdot 2 \cdot 3000 = 2^2 \cdot 3000 = 12,000$
1948	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3000 = 2^3 \cdot 3000 = 24,000$
1955	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3000 = 2^4 \cdot 3000 = 48,000$
	***
1997	$2^{10} \cdot 3000 = 3,072,000$

El año 1997 fue 70 años después del 1927, así que habrían 10 conjuntos de 7 años durante ese tiempo. Para el año 1997, la pelota de Ruth tendría un valor de \$3,072,000. Ya que tendría un valor mayor a la de McGwire en 1997, tendría un valor mayor en el 1999.

## **Experimento:**

- Averigua cuánto interés anual podrías ganar en una cuenta de ahorros en un banco local. Si inviertes dinero con esta tasa, ¿cuánto tardaría tu dinero en multiplicarse al doble? ¿Existen condiciones que tendrías que considerar?
- Como familia, habla sobre cualquier préstamo que tengas para una educación universitaria, una casa, un auto o un aparato electrónico. ¿Cuál fue el precio original? ¿Cual es la cantidad total que gastarías para el momento en que el préstamo se salde completamente?

## **Retos adicionales:**

- 1. Si inviertes \$10 a una tasa de interés anual de 7%, ¿en cuantos años aproximadamente se multiplicaría al doble tu dinero?
- 2. Si tu inversión gana 5% de interés anual, ¿en cuántos años aproximadamente se multiplicaría tu dinero?
- ¿Qué interés anual tendrías que ganar para multiplicar tu dinero al doble en siete años?
- 4. Una nueva pelota de béisbol cuesta aproximadamente \$6. ¿Cuántas pelotas de béisbol podrías comprar con \$3 millones?
- 5. Digamos que el número de ninfeas en un estanque se multiplica al doble cada año. Si el estanque estuvo cubierto hasta la mitad el lunes, ¿cuándo estuvo solamente cubierto hasta un cuarto? ¿Cuándo estaría completamente cubierto?
- 6. Valor tendría la pelota de Babe Ruth en 1999?

## Algo para pensar:

- La regla general de un banquero para encontrar el número de años necesarios para multiplicar al doble un inversión es dividir 70 por la tasa de interés. Trata esta regla en los retos.
- Los bancos tienen computadoras programadas para usar potencias fraccionales para calcular interés ganado en cuentas de ahorros e interés debido en préstamos.

## ¿Sabías que...?

- El precio de \$3,000,000 de la pelota de Mark McGwire fue 23
  veces mayor al de cualquier otra pelota vendida anteriormente y de
  cinco a seis veces más alto que el precio pagado por cualquier otro
  artículo deportivo.
- Un número, e, llamado así por Leonhard Euler (1707-1783), se usa al calcular intereses continuos.

## Recursos:

## Libros:

- Sports Illustrated. Home Run Heroes—Mark McGwire, Sammy Sosa and a Season for the Ages. New York: Simon & Schuster, 1998.
- "Baseball." The Encyclopedia Americana. International Edition. Bethel, CT: Grollier, Inc. 1998.
- "Mark McGwire vs. Sammy Sosa: The 1998 Home Run Race." The World Almanac and Book of Facts 1999. Mahwah, NJ: World Almanac Books, 1999.



## Respuestas a retos adicionales:

años después de 1927, así que hay 72/7 conjuntos de 7 años. El valor sería de 272/7 • 3000. Usando una calculadora, esto es aproxi- madamente \$3,744,810.	
(6.) El año 1997 fue 70 años después de 1927, así que habrían 10 conjuntos de 7 años durante ese tiempo. El valor se multiplicaría al doble diez veces, dando 210 • 3000, o sea \$3,072,000. El año 1999 fue 72	
(5.) El estanque estaría cubierto a un cuarto el domingo. Para el martes, estaría totalmente cubierto.	
500,000 pelotas.	
(4.)	
(3.) Aproximadamente 10.4%.	
(2.) El dinero se multiplicará al doble durante el 14º año.	
Asumiendo que no se hagan retiros γ que todo el interés se vuelve a invertir, el saldo llegará a \$20 durante el décimo año.	
(.r)	
Notas:	





¿Cuál de estas galletas cubiertas de chocolate,

TE comerías

¡Resuélvelo! Digamos que te encanta el chocolate. Cada galleta está cubierta con chocolate el mismo espesor. Si quisieras escoger la galleta con más chocolate, ¿cuál escogerías?

**Pista:** Piensa sobre cómo medir la superficie de cada galleta.

No existen maneras simples de encontrar superficies exactas de formas irregulares, tales como masas de tierra o células vivientes. Calcular dichas superficies es muy importante en la planificación de uso de tierras y las investigaciones médicas.

mmm...

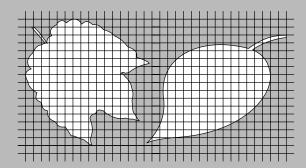
## Comienza:

Calca las galletas en una hoja de papel cuadriculado y córtalas. ¿Cómo piensas que las superficies se comparan? ¿Ayudaría el papel cuadriculado?

## Solución completa:

Hay muchas maneras de hacer este reto.

 Calca las galletas en papel cuadriculado y cuenta el número de cuadros que cada una cubre. Mientras más sean pequeños los cuadros, mejor será el estimado de la superficie.



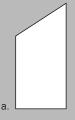
- Corta las galletas, coloca una encima de la otra y corta las partes de una que no están cubiertas por la otra. Trata de llenar el espacio adicional con las partes que cortaste. Si no puedes cubrir toda la primera galleta con las partes de la segunda, la primera es más grande. Si te quedan piezas de la segunda galleta cuando la primera está cubierta, la segunda es más grande.
- Cubre cada galleta con algo pequeño (cereal o arroz) y luego compara ambas cantidades.

## **Experimento:**

- Calcula la superficie de un parque de béisbol cercano.
- Encuentra una forma irregular en algún lugar del cuarto. Calcula su superficie.
- Dibuja una forma irregular en un pedazo de papel. Escoge algún punto dentro de la forma y llama eso el "centro". Encuentra las longitudes desde el centro a puntos diferentes en el extremo de la forma. (Si un segmento sale fuera de la forma, suma las longitudes de las piezas dentro de la forma. Encuentra el promedio de todas las formas. Deja que este promedio sea el "radio" de la forma. Usa la fórmula para la superficie de un círculo (π radio radio, o aproximadamente 3.14 r r). Este debe ser un buen estimado de la superficie.

## Retos adicionales:

- 1. Puedes usar un cordón para calcular el perímetro de cada galleta. Algunas personas pueden pensar que la galleta con mayor diámetro tiene mayor superficie. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué sí o por qué no?
- 2. Puedes encontrar la superficie de algunas figuras dividiéndolas en rectángulos, cuadrados o triángulos. ¿Cómo podrías dividir las formas a continuación para encontrar la superficie?





## Algo para pensar:

- Algunas personas dicen que una costa tiene una longitud infinita.
   ¿Qué querrán decir con esto?
- Cuando las personas hablan de comprar tantas yardas de alfombra, en realidad hablan de yardas cuadrados; con yardas de concreto o arena, en realidad hablan de yardas cúbicas.

## ¿Sabías que...?

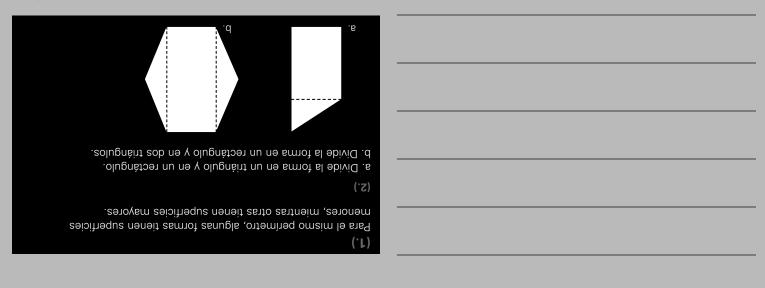
- La medida cuadrada es razonable para encontrar superficies porque las regiones cuadradas pueden cubrir una superficie plana sin superposiciones ni huecos.
- Aunque usualmente lees sólo sobre la superficie cubierta por un derrame de petróleo, el mismo también tiene volumen.
- Un planímetro es una herramienta que mide la superficie de formas irregulares, calcando el perímetro de la figura. Un planímetro implica los conceptos de coordinadas polares.

## **Recursos:**

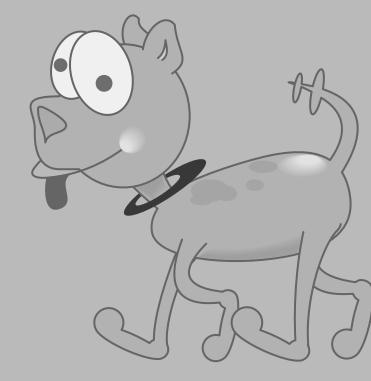
### Libros:

- Gravemeijer, K., M. A. Pligge, and B. Clarke. "Reallotment." In Mathematics in Context. National Center for Research and Mathematical Sciences Education and Freudenthal Institute (eds.). Chicago: Encyclopaedia Britannica Educational Corporation, 1998.
- Lappan, G., J. Fey, W. Fitzgerald, S. Friel, and R. Phillips.
   Connected Mathematics: Covering and Surrounding. Palo Alto, CA:
   Dale Seymour Publications, 1996.

## Respuestas a retos adicionales



Notas:			







## ¿Eres SUPERSTICIOSO

¿Evitas el número 13?

¡Resuélvelo! ¿Hay un viernes 13 todos los años?

Pista: Si el 1 de enero fuese lunes, ¿en qué día de la semana caería el 13 de enero? ¿Y qué del 1 de febrero o el 13 de febrero? ¿Otros meses?

Razonar sobre patrones con números y fechas ayuda a desarrollar el razonamiento lógico. Asociar tales patrones determina las fechas anuales de algunos días feriados nacionales al mismo tiempo que es un principio operativo para ciertas máquinas.



## Comienza:

- Haz una lista. Si el 1 de enero es lunes, ¿en qué día cae el 13 de enero? ¿En qué día cae el primer día del próximo mes? ¿El 13 del próximo mes? ¿Y si el 1 de enero fuera un martes?
- Busca un calendario y mira cómo caen las fechas. ¿Cuántos calendarios distintos son posibles? (Recuerda los años bisiestos.)

## Solución completa:

Hay 14 calendarios distintos. (Mira el sitio web para consultar todos los calendarios.) Hay siete calendarios posibles para años que no son bisiestos: uno con el 1 de enero en cada día de la semana. Los años bisiestos dan siete calendarios más, para un total de 14. Por ejemplo, si el 1 de enero cae miércoles, tienes las siguiente lista:

1 de enero	Miércoles	1 de abril	Martes
13 de enero	Lunes	13 de abril	Domingo
1 de febrero	Sábado	1 de mayo	Jueves
13 de febrero	Jueves	13 de mayo	Martes
1 de marzo	Sábado	1 de junio	Domingo
13 de marzo	Jueves	13 de junio	Viernes

Debido a que el 13 de junio es un viernes, puedes parar aquí. La tabla a continuación muestra el total de viernes 13 para los 14 calendarios.

Cuando el 1 de enero es	Meses de años no bisiestos en los cuales habrá un viernes 13	Meses de años bisiestos en los cuales habrá un viernes 13
Lunes	Abril, Junio	Septiembre, Diciembre
Martes	Septiembre, Diciembre	Junio
Miércoles	Junio	Marzo, Noviembre
Jueves	Febrero, Marzo Noviembre	Febrero, Agosto
Viernes	Agosto	Mayo
Sábado	Mayo	Octubre
Domingo	Enero, Octubre	Enero, Abril, Julio

## **Experimento:**

- Usa un almanaque o una enciclopedia para descubrir cómo se nombraron los meses y por qué tienen un número diferente de días.
- Si hubieras nacido un 29 de febrero, ¿cuántos cumpleaños habrías tenido para esta fecha?
- El trece puede ser un número afortunado para los Estados Unidos. Piensa en por lo menos una razón por qué.
- Estudia un billete de dólar y averigua si puedes encontrar "13" objetos en común.

 Usa un almanaque o enciclopedia para investigar por qué el número 13 se considera desafortunado para otros.

### Retos adicionales:

- 1. ¿Por qué el año 2000 es un año bisiesto cuando el 1900 no lo fue?
- 2. Si tu videocasetera no puede funcionar con el año 2000, a qué año la puedes programar para que los días sean los mismos?

## ¿Sabías que...?

- La palabra "triskaidekafobia" significa temor al número 13.
- Algunos hoteles no tienen un piso 13 debido a los temores de la gente al 13.
- El calendario se basa en movimientos del sol y la tierra.
- Han habido muchos calendarios diferentes en el pasado. El calendario actual comenzó en el 1582 cuando el Papa Gregorio XIII decretó que el día siguiente al 4 de octubre debería ser el 15 de octubre para recuperar los días perdidos al utilizar el calendario anterior.
- La corrección del calendario no ocurrió en Gran Bretaña y sus colonias (incluyendo las de Norteamérica) hasta el 1752.
- El año nuevo chino cae en cualquier época entre finales de enero hasta la mitad de febrero. El calendario lunar chino se basa en ciclos de la luna, con un ciclo completo que requiere 60 años (5 ciclos de 12 años cada uno).
- La matemática de la aritmética modular se usa para encontrar respuestas a retos como este.

## Algo para pensar:

- Por qué piensas que tenemos siete días cada semana con 52 semanas cada año?
- Los hoteles que llaman "14" al piso 13 aún así tienen un piso 13.
- Las palabras septiembre, octubre y noviembre derivan de las palabras en latín septem, octo y novem, las cuales significan siete, ocho y nueve respectivamente, pero los meses no son el séptimo, octavo y noveno. ¿Por qué?

## Recursos:

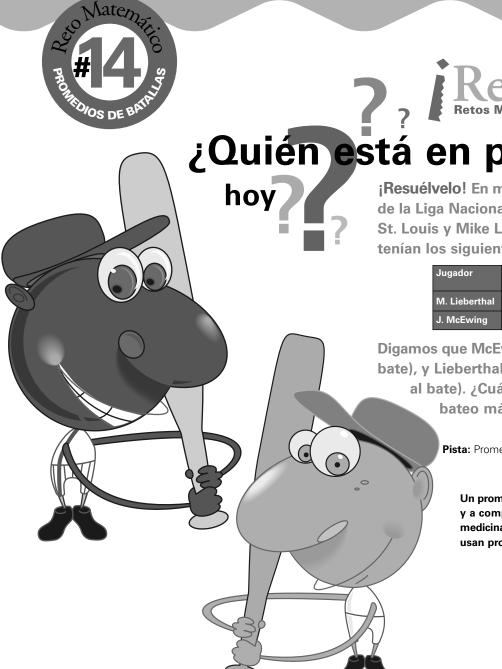
### Libros:

 The World Almanac and Book of Facts 1999. Mahwah, NJ: World Almanac Books, 1999.

## Sitios web:

- www.julian12.com/history.htm
- www.stjohndc.org/what/9609ca1.htm

Respuestas a retos adicionales:	
Los años bisiestos típicamente ocurren cada cuatro años, excepto al final del siglo. Solamente aquellos siglos divisibles por 400 son años bisiestos.  (2.) Answer: 1972.	
Notas:	



Resuélvelo Retos Matemáticos para la Familia

¿Quién está en primera base

¡Resuélvelo! En mayo de 1999, dos jugadores de béisbol de la Liga Nacional, Joe McEwing de los Cardenales de St. Louis y Mike Lieberthal de los Phillies de Filadelfia tenían los siguientes promedios de bateo:

Jugador	Equipo	Turnos al bate	Hits	Promedio de bateo
M. Lieberthal	Phillies	132	45	.341
J. McEwing	Cardinals	132	45	.341

Digamos que McEwing bateó 0.800 (4 hits en 5 turnos al bate), y Lieberthal bateó "perfecto" (3 hits en 3 turnos al bate). ¿Cuál jugador tiene ahora el promedio de bateo más alto? ¿Te sorprendiste?

> Número de hits redondeado a la Pista: Promedio de bateo = Número de milésima más cercana turnos al bate

Un promedio es una herramienta que nos ayuda a entender y a comparar conjuntos de números. Los deportes, la medicina y los seguros son tres de los muchos campos que usan promedios.

## Comienza:

Haz una nueva tabla con la información actualizada.

## Solución completa:

Ambos jugadores tuvieron 45 hits en 132 turnos al bate. Entonces, con las estadísticas de los próximos turnos al bate, el promedio de McEwing es de 49/137, o aproximadamente 0.358, mientras que el promedio de bateo de Lieberthal es de 48/135, o aproximadamente 0.356 [es un símbolo que significa "aproximadamente igual a".]

Jugador	Equipo	Turnos al bate	Hits	Promedio de bateo	Próximos turnos al bate	Próximos Hits	Nuevo promedio
M. Lieberthal	Phillies	132	45	<u>45</u> ≈.341 132	3	3	<u>48</u> ≈.356 135
J. McEwing	Cardinals	132	45	<u>45</u> ≈.341 132	5	4	<u>49</u> ≈.358 137

McEwing tiene el promedio de bateo más alto. Una manera de que este resultado inesperado tenga sentido es imaginar que McEwing tiene 3 hits en sus primeros 3 turnos al bate, mientras que Lieberthal también tiene 3 hits en 3 turnos al bate. Entonces el par aún sigue empatado. Durante los últimos 2 turnos al bate para McEwing, él logra 1 hit. Este promedio de 1 por 2, o sea 0.500, es mejor que su promedio anterior, así que su promedio de bateo sube.

## **Experimento:**

• Mira otros deportes. ¿Qué estadísticas de recopilan? ¿En cuáles se calculan promedios?

## **Retos adicionales:**

1. Digamos que el Yankee de Nueva York Chili Davis y Lieberthal tienen los promedios de bateo mostrados.

Jugador	Equipo	Turnos al bate	Hits	Promedio de bateo
M. Lieberthal	Phillies	132	45	<u>45</u> ≈.341 132
C. Davis	Yankees	137	47	<u>47</u> ≈.343 137

Si Davis bateó para 3 de 3 mientras que Lieberthal tuvo 4 hits en sus próximos 5 turnos al bate, ¿quién tiene el mejor promedio de bateo ahora?

2. ¿Qué número se puede añadir tanto al numerador como al denominador de una fracción para que la nueva fracción sea equivalente a la fracción original?

## ¿Sabías que...?

- Rogers Hornsby de los Cardenales de St. Louis tuvo el promedio de bateo más alto de la historia del béisbol moderno. En 1942, Hornsby bateó un sorprendente 0.424.
- La palabra fracción viene de la palabra en Latín frangere, que significa "romper".
- Los antiguos egipcios usaban primordialmente fracciones cuyos numeradores eran 1.
- Los promedios de bateo típicamente se expresan como números enteros, pero en realidad son decimales.

## Algo para pensar:

- Si añades todos los numeradores y denominadores en un conjunto de fracciones equivalentes, el resultado es una fracción equivalente a las del conjunto original.
- Si sacaste una A en un examen y una C en una tarea, ¿tienes un promedio de B?
- En el reto, dos jugadores comienzan el día con el mismo promedio de bateo. Lieberthal bateó un promedio de 1.000, mientras McEwing bateó un promedio de 0.800, pero sin embargo McEwing terminó el día con el promedio acumulativo de bateo más alto. Tales resultados inesperados son llamados "paradojas de Simpson," en homenaje a Thomas Simpson, un matemático que trabajó en el siglo dieciocho.
- Lou Abott y Bud Costello tenían una rutina de comedia sobre béisbol. llamada "Who's on First?"

## Recursos:

### Libro:

• The World Almanac and Book of Facts 1999. Mahwah, NJ: World Almanac Books, 1999.

## Websites

- Salón de la Fama del Béisbol:
  - www.baseballhalloffame.org
- Datos para explorar:
  - curriculum.qed.qld.gov.au/kla/eda/sim\_par.htm
- UCLA: Paradoja de Simpson:
  - www.stat.ucla.edu/~abraverm/Simpson/simpson.html
- Juego con la paradoja de Simpson::
  - www.stat.ucla.edu/~abraverm/Simpson/simpsonpt.html
- www.aentv.com/home/golden/colgate.htm

## Respuestas a retos adicionales:

Notas:

(2.) El número 0.							
C. Davis	Jankees	<b>Z</b> EI	Lτ	<u>751</u> 751 ≈.343	3	ε	071 20 ≈.357
M. Lieberthal	səillidq	132	917	135 7 <u>7</u> 5 ≈ 341	g	Þ	751 835.≈ <u>64</u>
Jugador	oqiup∃	somut al bate	stiH	Promedio de bateo	omixòr¶ somut sed ls	omixò19 etiH	Nuevp oibemorq
El promedio de Liebertrial es mejor, aunque no por mucno.							

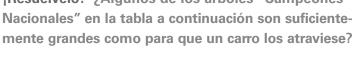


**PASAJE ANGOSTO** 



## ¿Alguna vez has visto un árbol suficientemente

grande para atravesarlo en automóvil?
¡Resuélvelo! ¿Algunos de los árboles "Campeones



Arbol	Perímetro a 4.5 pies sobre el terreno, en pulgadas	Altura en pies	Ubicación
American Beech	279	115	Harwood, MD
Black Willow		76	Grand Traverse Co., MI
Coast Douglas Fir	438	329	Coos County, OR
Coast Redwood	867	313	Prairie Creek Redwoods State Park, CA
Giant Sequoia		275	Sequoia National Park, CA
Loblolly Pine		148	Warren, AR
Pinyon Pine	213	69	Cuba, NM
Sugar Maple	274	65	Kitzmiller, MD
Sugar Pine	442	232	Dorrington, CA
White Oak		96	Wye Mills State Park, MD

**Pista:** La distancia alrededor de un árbol es perímetro. La distancia alrededor de un círculo es su circunferencia. El "ancho" de un círculo es su diámetro. Encontrar la circunferencia de un círculo implica el  $\pi$  número, aproximadamente 3.14. La circunferencia de un círculo es  $\pi$  multiplicado por su diámetro.

Medir es importante en muchos trabajos. Los carpinteros, biólogos, silvicultores, diseñadores y publicadores usan fórmulas de medición en su trabajo.

## Comienza:

¿Qué necesitas saber sobre un auto antes de contestar la pregunta? ¿Sobre el árbol? ¿Qué sabes sobre círculos? ¿Cómo se relaciona la distancia alrededor de un círculo con la anchura de un árbol?

## Solución completa:

Para encontrar el diámetro de un círculo cuando sabes la circunferencia, divides la circunferencia por (aproximadamente 3.14). Por ejemplo, el Black Willow tiene un perímetro de 400 pulgadas y ya que 400 ÷ 3.14 es aproximadamente 127, el Black Willow tiene aproximadamente 127 pulgadas de ancho, suficiente para que un auto pueda atravesarlo y que sobren por lo menos 2 pies a cada lado.

Arbol	Perímetro a 4.5 pies sobre el terreno en pulgadas*	Diámetro (Perímetro/π) en pulgadas*	Altura en pies
American Beech	279	89	115
Black Willow	400	127	76
Coast Douglas Fir	438	139	329
Coast Redwood	867	276	313
Giant Sequoia	998	318	275
Loblolly Pine	188	60	148
Pinyon Pine	213	68	69
Sugar Maple	274	87	65
Sugar Pine	442	141	232
White Oak	382	122	96

<sup>\*</sup>Las medidas están redondeadas hasta el número entero más cercano.

## **Experimento:**

Encuentra un árbol en tu patio o parque. Calcula el diámetro del árbol.

### Retos adicionales:

- 1. ¿Alguno de los árboles "Campeones Nacionales" es más alto que un edificio de 15 pisos?
- ¿Cuántas personas tomadas de la mano harían falta para rodear el Giant Sequoia?

## Algo para pensar:

- ¿Cómo piensas que los silvicultores calculan el peso de un árbol?
- ¿Cómo calculan los silvicultores el número de pies bajo la madera de un árbol?
- ¿Por qué se mide el perímetro a 4.5 pies sobre el suelo?

## ¿Sabías que...?

 Hay aproximadamente 825 especies nativas y naturales de árboles en los Estados Unidos.

- Se cree que el árbol más viejo actualmente vivo es un pino Bristlecone de California llamado Methuselah (Matusalén), el cual se calcula que tiene 4,700 años de edad.
- El árbol vivo más grande que se conoce, el General Sherman Giant Sequoia en California, pesa tanto como 41 ballenas azules o 740 elefantes, aproximadamente 6167 toneladas.
- Cerca de 1638, Galilelo Galilei (1564-1643) sugirió que los árboles solamente podrían crecer hasta los 300 pies de altura, debido a factores relacionados a la forma y el material.

## **Recursos:**

### Libros:

 The World Almanac and Book of Facts 1999. Mahwah NJ: World Almanac Books. 1998.

## Sitio web:

• National Register of Big Trees, American Forests www.amfor.org

## Respuestas a retos adicionales:

rodear el árbol.

Asumiendo que la extensión de los brazos (con los brazos abiertos al tomarse de las manos) de una persona es típicamente de 60 pulgadas, harían falta aproximadamente  $17\ \rm personas$  para

(,S

Asumiendo que un piso típico mide 12 pies de alto, 15 pisos medirían aproximadamente 180 pies de alto. Entonces, el coast oduglas fir, el coast redwood, el giant sequoia o el sugar pine serían más altos que un edificio de 15 pisos. El Loblolly Pine tendra aproximadamente la misma altura.

(1